

## 6 L'interpolazione statistica

Risolvere i seguenti esercizi relativi all'interpolazione col metodo dei minimi quadrati adottando, di volta in volta, come funzione interpolante il tipo di funzione espressamente indicato:

- 1** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5
y	7	11	15	16	18

$[y = 2,7 \cdot x + 5,3]$

- 2** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5
y	32	44	42	48	56

$[y = 5,2 \cdot x + 28,8]$

- 3** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5
y	14	11	9	7	2

$[y = -2,8 \cdot x + 17]$

- 4** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5
y	2,5	4,6	7,8	11	13,8

$[y = 2,9 \cdot x - 0,76]$

- 5** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5	6
y	5	7	12	15	16	21

$[y = 3,143x + 1,667]$

- 6** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	3	5	8	11	15	16	18

$[y = 2,643 \cdot x + 0,286]$

- 7** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	21	19	15	11	8	6	2

$[y = -3,21 \cdot x + 24,57]$

- 8** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5,6	7,8	9	12,2	13,5	15	18

$[y = 2,004x + 3,571]$

- 9** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	0	1	2	3	4	5
y	3,5	5,4	7	10,2	12	15

$[y = 2,3 \cdot x + 3,1]$

- 10** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	3	6	4	8	7	9

$[y = 0,786 \cdot x + 3,643]$

- 11** Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	3	4	5	6	7	8
y	11	15	21	31	42	47

$[y = 7,74 \cdot x - 14,75]$

12 Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	2	4	6	8	10
y	5	7	8	14	16

[ $y = 1,45 \cdot x + 1,3$ ]

13 Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	3	4	5	6	7
y	6	9	16	20	29

[ $y = 5,7 \cdot x - 12,5$ ]

14 Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	5	9	11	12	18	22
y	1	3	5	9	15	18

[ $y = 1,082 \cdot x + 5,387$ ]

15 Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	3	5	7	8	11	15	21	24	26
y	6	9	8,5	12	13,6	12,8	14	16	18,2

[ $y = 0,415 \cdot x + 6,698$ ]

16 Trovare l'equazione della retta interpolante per la seguente distribuzione:

x	5	6	7	8	9	10
y	15	17	19	21	23	25

[ $y = 2 \cdot x + 5$ ]

17 Per la serie di dati indicati nella tabella che segue trovare l'equazione della parabola interpolante del tipo  $y = a \cdot x^2$ :

x	1	2	3	4	5
y	3	5	8	11	14

[ $y = 0,634 \cdot x^2$ ]

18 Per la serie di dati indicati nella tabella che segue trovare l'equazione della parabola interpolante del tipo  $y = a \cdot x^2$ :

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	4,9	11	19,2	30,1	44	59,9

[ $y = 4,87 \cdot x^2$ ]

19 Per la serie di dati indicati nella tabella che segue trovare l'equazione della parabola interpolante del tipo  $y = a \cdot x^2$ :

x	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	0,06	0,26	0,56	0,97	1,45	2,96

[ $y = 0,289 \cdot x^2$ ]

20 Per la serie di dati indicati nella tabella che segue trovare: a) l'equazione della retta interpolante; b) l'equazione della parabola interpolante del tipo  $y = a \cdot x^2$ :

x	0	1	2	3	4	5
y	4	7	11	12	15	18

[ $y = 2,714 \cdot x + 4,381$ ;  $y = 0,867 \cdot x^2$ ]

21 Per la serie di dati di cui alla tabella che segue trovare l'equazione della funzione esponenziale interpolante:

x	1	2	3	4	5
y	15	18	24	35	46

[ $y = 10,594 \cdot 1,337^x$ ]

22 Per la serie di dati di cui alla tabella che segue trovare l'equazione della funzione esponenziale interpolante:

x	1	2	3	4	5	6
y	11,5	16,18	19,25	28,5	33	42

[ $y = 9,274 \cdot 1,294^x$ ]

23 Per la serie di dati di cui alla tabella che segue trovare l'equazione della funzione esponenziale interpolante:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	242	251	255	259	262	271	275	280	285	287

$$[y = 240,12 \cdot 1,019^x]$$

- 24 Per la serie di dati di cui alla tabella che segue trovare: a) l'equazione della retta interpolante; b) l'equazione della parabola interpolante del tipo  $y = a \cdot x^2$ ; c) l'equazione della funzione esponenziale interpolante:

x	1	2	3	4	5
y	5	9	14	20	28

$$[y = 5,7 \cdot x - 1,9; y = 1,212 \cdot x^2; y = 3,602 \cdot 1,529^x]$$

- 25 Per la serie di dati di cui alla tabella che segue trovare: a) l'equazione della retta interpolante; b) l'equazione della parabola interpolante del tipo  $y = a \cdot x^2$ ; c) l'equazione della funzione esponenziale interpolante:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	5,5	8,3	15	18,2	24	31	37

$$[y = 5,318 \cdot x - 1,414; y = 0,854 \cdot x^2; y = 4,698 \cdot 1,37^x]$$

- 26 Dimostrare che, usando come funzione interpolante la funzione  $y = a/x$ , si ottiene:

$$a = \left( \sum \frac{y}{x} \right) : \left( \sum \frac{1}{x^2} \right)$$

Quindi, dopo avere detto quale condizione deve essere soddisfatta perché si possa assumere la funzione considerata come funzione interpolante, calcolare il valore di  $a$  per la seguente distribuzione di dati:

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	10,5	8,5	7,1	6,1	5,2	4,6

[21,1]

- 27 Trovare l'equazione della funzione interpolante del tipo  $y = a/x$  per la seguente distribuzione di dati:

x	1	2	3	4	5	6
y	32	28	23	16	13	11

$$[y = 41,64/x]$$

- 28 Si dimostri che, usando come funzione interpolante la funzione di secondo grado:

$$y = a + bx + cx^2$$

i valori dei parametri  $a, b, c$  che soddisfano il metodo dei minimi quadrati, si ottengono risolvendo il sistema seguente:

$$\begin{cases} a \cdot n + b \cdot \sum x + c \cdot \sum x^2 = \sum y \\ a \cdot \sum x + b \cdot \sum x^2 + c \cdot \sum x^3 = \sum xy \\ a \cdot \sum x^2 + b \cdot \sum x^3 + c \cdot \sum x^4 = \sum x^2y \end{cases}$$

Quindi, si tratta di calcolare ordinatamente:

$$\begin{matrix} \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x^4 & \sum y & \sum xy & \sum x^2y \end{matrix}$$

Ottenuti i valori sopra indicati e fatte le opportune sostituzioni si tratta di risolvere il sistema lineare costituito dalle tre equazioni nelle incognite  $a, b, c$ .

Posto quanto sopra, determinare i valori dei parametri  $a, b, c$  per la seguente distribuzione di dati:

x	1	2	3	4	5
y	6	12	20	30	42

$$[a = 2; b = 3; c = 1]$$

- 29 Trovare l'equazione della parabola interpolante, di tipo generale, per la seguente distribuzione di dati:

x	1	2	3	4	5
y	7,3	18,8	36,3	59,8	89,3

$$[y = 1,8 + 2,5 \cdot x + 3 \cdot x^2]$$

Risolvere i seguenti esercizi sulla scelta del tipo più idoneo di funzione interpolante:

- 30 Quale tipo di funzione è più idoneo per interpolare la seguente distribuzione?

x	3	4	5	6	7
y	10	12	15	18,25	21

Trovare la relativa equazione.  
 [Rappresentando i dati si vede che la distribuzione ha andamento approssimativamente lineare. Quindi, interpolando con una funzione di tipo lineare si trova l'equazione  $y = 2,825 \cdot x + 1,125$ ]

**31** Dovendo interpolare la seguente serie di dati quale tipo di funzione è opportuno utilizzare?

x	1	2	3	4	5	6
y	2,969	3,094	3,224	3,359	3,501	3,648

Trovare la relativa equazione.  
 [Rappresentando i dati si vede che la distribuzione ha andamento approssimativamente esponenziale. Interpolando con una funzione esponenziale si ottiene l'equazione  $y = 2,85 \cdot 1,042^x$ ]

**32** Dovendo interpolare la seguente serie di dati quale tipo di funzione è più idoneo?

x	1	2	3	4	5
y	0,832	3,328	7,588	13,412	20,801

Trovare la relativa equazione.  
 [Rappresentando i dati si vede che la distribuzione ha andamento approssimativo del tipo  $y = a \cdot x^2$ . Quindi, interpolando con tale tipo di funzione si ottiene l'equazione  $y = 0,835 \cdot x^2$ ]

Risolvere i seguenti esercizi sull'interpolazione col metodo dei minimi quadrati:

**33** La seguente tabella indica la produzione, in migliaia di quintali, di un'azienda negli anni dal 1990 al 1996:

anni	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
produzione	120	130	132	140	138	146	142

Trovare l'equazione della retta interpolante; rappresentare graficamente su uno stesso sistema di assi i dati effettivi e quelli teorici; calcolare l'errore standard.

$$[y = 3,7 \cdot x + 124,29; E_s = 3,283]$$

**34** La seguente tabella indica i numeri indici nazionali relativi al costo di costruzione di un fabbricato residenziale negli anni dal 1992 al 1996:

anni	1992	1993	1994	1995	1996
numeri indici	83	100	119	135	161

Trovare l'equazione della retta interpolante; rappresentare graficamente su uno stesso sistema di assi i dati effettivi e quelli teorici; calcolare l'errore standard.

$$[y = 19,1 \cdot x + 81,4; E_s = 2,328]$$

- 35 La seguente tabella mostra la velocità (media) di un corpo in movimento, in tempi successivi:

tempi	1	2	3	4	5
velocità	18	35	58	73	89

Trovare l'equazione della retta interpolante; rappresentare graficamente su uno stesso sistema di assi i dati effettivi e quelli teorici; calcolare l'errore standard.

$$[y = 18 \cdot x + 0,6; E_s = 1,855]$$

- 36 La seguente tabella mostra il prelievo di materie prime da un magazzino nei cinque giorni lavorativi successivi di una data settimana:

giorno	L	M	Me	G	V
quantità	782	817	852	887	922

Trovare l'equazione della retta interpolante. Quindi, verificare che l'errore standard è uguale a zero dando giustificazione di questo fatto.

[Ponendo  $L = 0, M = 1, \dots$  si trova  $y = 35 \cdot x + 782$ . Si ha  $E_s = 0$  perché i dati osservati hanno andamento..... (!)]

- 37 La seguente tabella mostra i dati relativi al censimento della popolazione di una borgata negli anni dal 1990 al 1994:

anni	1990	1991	1992	1993	1994
censiti	2380	2456	2404	2372	2394

Trovare l'equazione della retta interpolante e stimare il grado di accostamento fra valori osservati e valori teorici.

$$[y = -5,6 \cdot x + 2,412,4; E_s = 28,465]$$

- 38 Nel corso di una settimana, in un locale cinematografico e al secondo spettacolo sono state registrate le seguenti presenze:

giorni	L	M	Me	G	V	S	D
presenze	680	702	750	780	812	868	910

Interpolare linearmente ed esponenzialmente precisando, facendo ricorso all'errore standard, quale fra le due funzioni interpolanti ottenute è più significativa.

[Si trova  $y = 38,71 \cdot x + 669,85$  con  $E_s = 7,87$  e  $y = 674,81 \cdot 1,05^x$  con  $E_s = 6,02$ . L'interpolante di primo grado è meno significativa di quella esponenziale]

- 39 Il reddito medio (in migliaia di lire) dei lavoratori dipendenti di una delle tante regioni italiane, negli anni dal 1988 al 1995, è quello indicato nella tabella che segue:

Anno	Reddito	Anno	Reddito
1988	5.010	1992	9.892
1989	6.050	1993	12.200
1990	7.200	1994	14.870
1991	8.530	1995	16.920

Interpolare linearmente ed esponenzialmente rappresentando su uno stesso sistema di assi le tre serie di dati: dati effettivi, dati teorici ottenuti interpolando linearmente e dati teorici ottenuti interpolando esponenzialmente.

$$[y = 1.712,28 \cdot x + 4.091; y = 5.037 \cdot 1,192^x]$$

**40** Una ditta vende due prodotti A e B. Le quantità vendute nei primi 6 mesi di un dato anno sono indicate nella tabella seguente distintamente per ciascun prodotto:

Mese	A	B
Gen.	4.800	1.300
Feb.	3.620	1.440
Mar.	3.600	1.620
Apr.	4.100	1.700
Mag.	4.380	1.630
Giu.	5.140	1.540

Interpolare le due distribuzioni mediante una retta. A quale delle due distribuzioni meglio si adatta come funzione interpolante la retta?

[Le equazioni delle rette interpolanti sono  $y = 128 \cdot x + 3.953$  e rispettivamente  $y = 52,85 \cdot x + 1.406$ . Nel primo caso si trova  $E_s = 526,53$ ; nel secondo  $E_s = 98,99$ . In conclusione la funzione lineare meglio si adatta come interpolante alla seconda distribuzione]

Risolvere i seguenti esercizi sulle serie storiche e sul trend:

**41** Per un dato fenomeno sono stati rilevati i seguenti dati:

Anni	1991	1992	1993	1994	1995
dati osservati	106	115	124	136	145

Dopo avere costruito l'equazione della retta che esprime il trend lineare e avere accertato il grado di accostamento fra valori effettivi e valori teorici, estrapolare la serie storica ricavando le proiezioni relative al 1996, 1997 e 1998.

$$[y = 9,9 \cdot x + 105,4; E_s = 0,735; 154,9; 164,8; 174,7]$$

**42** Per un dato fenomeno sono stati osservati i seguenti dati:

Anni	1991	1992	1993	1994	1995
dati osservati	1.020	1.086	1.160	1.230	1.313

Ritieni che sia più significativa un'ipotesi di trend lineare oppure esponenziale? Basandoti sul trend più significativo fornisci le proiezioni relative al 1996, 1997 e 1998.

[Trend lineare  $y = 73 \cdot x + 1.015,8$  con  $E_s = 3,97$ ; trend esponenziale  $y = 1.020,31 \cdot 1,06498^x$  con  $E_s = 1,688$ . Le proiezioni esponenziali richieste sono 1.397,79; 1.488,61; 1.585,34]

**43** Le spese di pubblicità (in milioni di lire) sostenute da un'azienda nell'arco di sei anni sono quelle indicate nella seguente tabella:

Anni	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Spesa	322	371	420	487	565	645

Determinare le proiezioni lineari e quelle esponenziali relativamente agli anni 1996, 1997 e 1998 verificando quali sono le più attendibili.

[Trend lineare  $y = 64,69 \cdot x + 306,62$ ; trend esponenziale  $y = 321,2 \cdot 1,15^x$ . Proiezioni lineari 694,76; 759,45; 824,14. Proiezioni esponenziali: 742,96; 854,40; 982,56. Le proiezioni esponenziali risultano più attendibili perché ....]

- 44 La serie storica della tabella che segue riguarda la produzione di un bene negli anni dal 1989 al 1995:

Anno	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995
Quantità	600	625	660	677	670	645	660

Costruire la funzione che esprime il trend lineare fornendo le proiezioni per gli anni 1996, 1997 e 1998. Ammettiamo poi che per questi tre anni vengano osservati i dati seguenti: 690; 705; 726. In questo caso si riformuli la funzione di trend lineare considerando i dati osservati per gli anni dal 1992 al 1998.

[La funzione di trend lineare relativa agli anni dal 1989 al 1995 è la seguente:  $y = 8,21 \cdot x + 623,5$ . Le proiezioni relative agli anni 1996, 1997 e 1998 sono rispettivamente 681; 689 e 697. Se i dati osservati per questi tre anni sono 690; 705 e 726, utilizzando la nuova serie storica dal 1992 al 1998, si trova la funzione di trend lineare «aggiornata» la cui equazione è  $y = 9,36 \cdot x + 653,78$ ]

- 45 Partendo dai dati di cui all'esercizio precedente trovare le funzioni interpolanti di tipo esponenziale.

[La funzione di trend esponenziale relativa agli anni dal 1989 al 1995 è  $y = 622,87 \cdot 1,013^x$ . Le proiezioni di tipo esponenziale richieste sono 682; 691; 700. La funzione di trend esponenziale aggiornata sulla base della serie storica che riguarda gli anni dal 1992 al 1998 è  $y = 654,27 \cdot 1,0136^x$ ]